Minicolloque n° 15 **Oral**

Instabilité paramétrique d'un système conservatif uni-dimensionnel

Johann Maddi[a*], Michel Saint-Jean[a], Christophe Coste[a]

a. Laboratoire MSC, UMR 7057 CNRS - Université de Paris, 75013 Paris, France

* email : johann.madi@univ-paris-diderot.fr

La dynamique de particules confinées dans des milieux quasi-unidimensionnels regroupe un large champ d'étude de systèmes physiques allant de la diffusion de colloïdes dans des canaux microfluidiques au glissement d'ondes de densité de charge en présence d'impuretés. Les particules, souvent en interaction, sont parfois soumises à des potentiels extérieurs donnant lieu à une dépendance temporelle des paramètres physiques du système. Cette dépendance temporelle est source de comportements non triviaux dont nous illustrons ici un exemple relatifs aux oscillateurs : l'instabilité paramétrique. Dans les systèmes usuels d'oscillateurs paramétriques, souvent décrits par l'équation de Mathieu [1], le forçage paramétrique nécessite une action extérieure apportant de façon continue de l'énergie à l'oscillateur. Il existe cependant des systèmes qui, bien qu'énergétiquement isolés, peuvent présenter des instabilités paramétriques internes [2]. Dans ce cas, la conservation de l'énergie se traduit par une résonance dite auto-paramétrique dans laquelle l'amplitude du forçage n'est plus constante au cours du temps.

Nous présentons le cas d'un dimère-ressort évoluant sur un potentiel sinusoïdal de même période que la longueur au repos du dimère. La présence de ce potentiel induit alors un couplage non-linéaire entre le mode de translation et le mode de vibration du dimère. Cette non linéarité peut conduire à un forçage paramétrique d'un mode vers l'autre permettant le déclenchement d'une instabilité paramétrique. Dans le cas du système considéré ici on montre que seul le mode de vibration peut être instable. Cet exposé exhibe les différents comportements du dimère en fonction de l'énergie injectée dans le système et les énergies caractéristiques d'interaction.

Deux régimes principaux d'évolution du dimère sont mis en évidence par des simulations numériques selon que le centre de masse reste ou non piégé dans un puits du potentiel extérieur. Dans la configuration "piège", on trouve analytiquement la frontière du domaine instable, associée à un important transfert d'énergie entre les deux modes. On donne également une estimation des extrema d'amplitude de ces modes dans le cas où le système se trouve dans cette zone d'instabilité. Dans la configuration "dérive" on observe numériquement que le déclenchement de l'instabilité mène systématiquement à un comportement chaotique du dimère. Les frontières du domaine instable obtenues à l'aide de l'équation de Mathieu dans cette configuration semblent confirmer cette observation.

[1] L. Ruby, Applications of the Mathieu equation,American Journal of Physics,64, 39–44 (1996)

[2] B. Denardo & J. Earwood & V. Sazonova, Parametric instability of two coupled nonlinear oscillators, American Journal of Physics,67, 187–195 (1999)

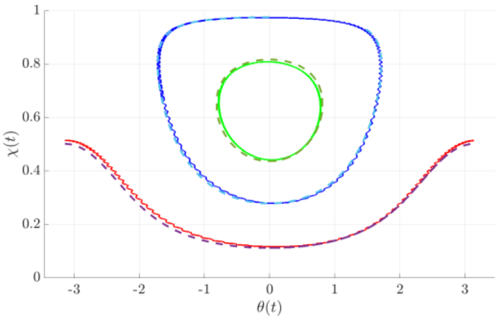

Figure : Portrait de phase du dimère " piégé " : χ est défini comme le rapport de l'énergie du mode de translation sur l'énergie totale du système. θ représente le déphasage entre les modes de translation et de vibration. *Lignes continues* : obtenues par simulation numérique des équations exactes du mouvement. *Lignes discontinues* : Issues du développement en échelles multiples des équations du mouvement. Une faible raideur du ressort permet d'observer des orbites fermées ($\theta_0 = 0$ et $\chi_0 = 0{,}11$; $0{,}44$; $0{,}98$).

Figure 1 : Portrait de phase du dimère « piégé » : Chi est défini comme le rapport de l'énergie du mode de translation sur l'énergie totale du système. Theta représente le déphasage entre les modes de translation et de vibration. Lignes continues : obtenues par simulation numérique des équations exactes du mouvement. Lignes discontinues : Issues du développement en échelles multiples des équations du mouvement. La raideur du ressort est prise suffisamment faible afin d'observer des orbites fermées (Theta$_0$ =0 et chi$_0$ de à).